№ 5 дәріс

Шек бар болуының Коши критерийі. Бірсарынды функция шегінің бар болу критерийі.

1-теорема (Коши критерийі). $f: E \to \mathrm{R}$ функциясының $\mathrm{E} \ni x \to a$ ұмтылғанда нақты мәнді шегінің бар болуы үшін кез-келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$, $0<|x'-a|<\delta(\varepsilon)$ шарттарын қанағаттандыратын барлық $x, x' \in \mathrm{E}$ нүктелері үшін $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатын $\delta(\varepsilon)>0$ санының табылуы қажетті және жеткілікті.

<u>Ескерту.</u> Бұл теоремадағы $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$, $\forall x, x' \in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{\mathrm{E}}(a)$ шартын, әдетте, Коши шарты деп атайды.

Осы аса маңызды теореманың кванторлар арқылы жазылуы мен a нүктесінде Коши шартының орындалмау жағдайын келтірейік.

$$\lim_{\mathrm{E}\ni x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x, x'\in\mathrm{E}\big(0<|x-a|<\delta,\ 0<|x'-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon\big)$$

немесе

$$\exists \lim_{\mathrm{E}\ni x\to a} f(x)=b\in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{\mathrm{E}}(a)\ \forall x, x'\in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{\mathrm{E}}(a)\big(|f(x)-f(x')|<\varepsilon\big).$$

Енді керісінше, $f(x)$ функциясының a нүктесінде шегі жоқ жағдайының жазылуы:

$$\overline{\exists} \lim_{\mathrm{E}\ni x\to a} f(x) := \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists\tilde{x}, \tilde{x}'\in\mathrm{E}\big(\big(0<|\tilde{x}-a|<\delta,\ 0<|\tilde{x}'-a|<\delta\big)\wedge|f(\tilde{x})-f(\tilde{x}')|\geq\varepsilon\big)$$

немесе

$$\overline{\exists} \lim_{\mathrm{E}\ni x\to a} f(x) := \exists\varepsilon>0\ \forall \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{\mathrm{E}}(a)\ \exists\tilde{x}, \tilde{x}'\in\mathrm{E}\big(|f(\tilde{x})-f(\tilde{x}')|\geq\varepsilon\big).$$

Дәлелдеуі.Қажеттілігі. Егер $\lim_{x\to a} f(x)=b$ шегі бар болса, онда шек анықтамасы бойынша

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x,x'\in\overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{E}(a)\left(\left(\left|f(x)-b\right|<\varepsilon/2\right)\wedge\left(\left|f(x')-b\right|<\varepsilon/2\right)\right).$$

Сонда

$$\left|f(x)-f(x')\right|\le\left|f(x)-b\right|+\left|f(x')-b\right|<\varepsilon .$$

Жеткіліктілігі. $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{E}(a)\ \ \forall x,x'\in\overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{E}(a)\ \ \left(\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon\right)$ – Коши шарты орындалған деп ұйғарайық. Сонымен бірге, $\{x_n\}\in E,\ x_n\neq a\ \forall n\in N$ және a санына жинақталатын тізбек болсын. Сонда $\{f(x_n)\}$ тізбегінің фундаментальдік екенін көрсетейік. Шынында да, $\{x_n\}$ тізбегі a-ға ұмтылатын болғандықтан, $\exists N\ \forall n>N\ \left(0<|x_n-a|<\delta(\varepsilon)\right)$. Осы теңсіздік пен $\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon\ \forall x,x'\in\overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{E}(a)$ теңсіздіктерін салыстырып, $\forall n,m>N\ \left|f(x_n)-f(x_m)\right|<\varepsilon$, яғни $\{f(x_n)\}$ сандық тізбегі фундаментельдік, демек, жинақты.

Енді $\{f(x_n)\}$ тізбегінің шегі $\{x_n\}$ тізбегін таңдаудан тәуелсіз екенін көрсетейік. Шынында да, егер біз a санына жинақталатын $\{x_n\}\in E$, $\{x'_n\}\in E$ екі тізбегі бар және $f(x_n)\to b$, $f(x'_n)\to b'$, $n\to\infty$ және $b\neq b'$ деп ұйғарсақ, онда $x_1,x'_1,x_2,x'_2,...,x_n,x'_n,...$ тізбегі де a санына жинақталады, бірақ $f(x_1),f(x'_1),f(x_2),f(x'_2),...,f(x_n),f(x'_n),...$ тізбегі жинақталмайды. Бұл қайшылық $b=b'$ екенін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

Функция шегінің жалпы қасиеттері

Бұрын атап өткеніміздей, тек бір ғана мән қабылдайтын $f:E\to R$ функциясын тұрақты функция деп атаймыз. Егер $f:E\to R$ функциясы E жиыны үшін шектік нүкте болатын a нүктесінің белгілі бір $\overset{\circ}{U}_{E}(a)$ маңайында тұрақты болса, онда $f:E\to R$ функциясын $E\ni x\to a$ ұмтылғанда финалді тұрақты деп атаймыз. Егер $f:E\to R$ функциясы үшін $|f(x)|<C$, $f(x)<C$, $C<f(x)$, $\forall x\in E$, теңсіздіктерін қанағаттандыратын $C\in R$ саны табылса, онда оларды сәйкес шектеулі, жоғарыдан шектеулі, төменнен шектеулі функция деп атаймыз. Теңсіздіктер a нүктесінің белгілі бір $\overset{\circ}{U}_{E}(a)$ маңайында ғана орындалса, онда функцияны сәйкес $E\ni x\to a$ ұмтылғанда финалді шектеулі, финалді жоғарыдан шектеулі, финалді төменнен шектеулі деп атаймыз.

Мысалы, $f(x)=\sin\frac{1}{x}+x\cos\frac{1}{x}$ функциясы $x\neq0$ анықталу аймағында шектеулі емес, ал $x\to0$ ұмтылғанда финальді шектеулі.

1-теорема. Егер $f:E\to R$ функциясы $E\ni x\to a$ ұмтылғанда финалді тұрақты болса, онда $\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)$ – шегі бар.

Дәлелдеуі. Финалді тұрақты функция анықтамасы бойынша

$\exists \overset{o}{U}_E(a) \ \forall x \in \overset{o}{U}_E(a)$ $(f(x)=b)$. Демек, $\forall V(b) \exists \overset{\circ}{U}_E(a) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_E(a) (f(x) \in V(b))$. Бұл b саны x a-ға ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының шегі болады деген сөз.

***2*-теорема.** Егер $E \ni x \to a$ ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі бар болса, онда ол $f : E \to \mathrm{R}$ функциясы x a-ға ұмтылғанда финалді шектеулі.

Дәлелдеуі. Шынында да, егер $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ болса, онда шек анықтамасы бойынша

$$\varepsilon = \mathrm{M} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathrm{E} \ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon = \mathrm{M}),$$

ал бұдан $$|f(x)| = |f(x) - b + b| \le |f(x) - b| + |b| < M + |b| = C,$$

яғни $f(x)$ финальді шенелген функция.

3-теорема. Егер $E \ni x \to a$ ұмтылғанда $f : E \to \mathbb{R}$ функциясының шегі бар болса, онда ол шек жалғыз.

Дәлелдеуі. Айталық $f : E \to \mathbb{R}$ функциясының $x \to a$ ұмтылғанда екі шегі

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2$ бар болсын және олар бірі біріне тең емес, яғни $b_1 \ne b_2$ деп ұйғарайық әрі ол нүктелердің $V(b_1)$, $V(b_2)$ маңайларын қиылыспайтындай етіп, яғни $V(b_1) \cap V(b_2) = \varnothing$ деп алайық, онда

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 := \exists \overset{\circ}{U}{}'_E(a) \left(f\left(\overset{\circ}{U}{}'_E(a)\right) \subset V(b_1) \right),$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_2 := \exists \overset{\circ}{U}{}''_E(a) \left(f\left(\overset{\circ}{U}{}''_E(a)\right) \subset V(b_2) \right).$$

Енді a нүктесінің $\overset{\circ}{U}_E(a) \subset \overset{\circ}{U}{}'_E(a) \cap \overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ маңайын алайық, ол $\overset{\circ}{U}_E(a) \ne \varnothing$. Одан $x \in \overset{\circ}{U}_E(a)$ нүктесін алсақ, онда $f(x) \in V(b_1) \cap V(b_2)$ болар еді, ал бұлай болуы мүмкін емес, өйткені $V(b_1) \cap V(b_2) = \varnothing$. Бұл қайшылық теореманы дәлелдейді.

№ 6 дәріс

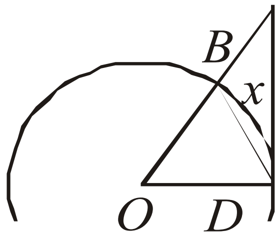
I және II тамаша шектер. Функцияларды салыстыру.

1. Бірінші тамаша шек $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Мұны "$\varepsilon - \delta$" тіліндегі Коши анықтамасы көмегімен дәлелдейік. Ең алдымен, егер $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ болса, онда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (1)$$

теңсіздіктерінің орындалатынын дәлелдейік. Мұндағы $\cos x$, $\dfrac{\sin x}{x}$ функциялары жұп болғандықтан, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ жағдайын ғана қарастыру жеткілікті. Суретте көрсетілген бір бұрышы x радианға тең болатын OBA үшбұрышы, OBA секторы және OCA тікбұрышты үшбұрышының аудандары



1-сурет.

$$\tfrac{1}{2}\sin x < \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}tgx$$

қатынасында болатыны айқын. Бұл теңсіздіктерден $\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$, ал одан (1) дәлелдеуі шығады. Енді (1) теңсіздіктерді (-1)-ге көбейтсек, $-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$, ал оған 1-ді қосып, $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$ теңсіздіктерін алып, оның оң жағының

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\frac{x}{2} = x$$

екенін байқап, әрбір $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ үшін

$$1 - |x| < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (2)$$

теңсіздіктерінің орындалатынын көреміз.

Кез-келген $0 < \varepsilon < 1$ санына сәйкес $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ деп алсақ, онда $0 < |x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ болғанда (2) бойынша

$$1 - \varepsilon < \frac{\sin x}{x} < 1$$

ал бұл $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ деген сөз.

2. Екінші тамаша шек

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (3)$$

Мұны тізбектер тіліндегі Гейне анықтамасы көмегімен дәлелдейік. Біз тізбектер теориясында

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

деп e санын енгізгенбіз. Онда оң бүтін сандардан құрылған кез-келген өспелі $\{n_k\}$ тізбегі үшін де

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \qquad (4)$$

Шынында да, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ болғандықтан, кезкелген $\varepsilon > 0$ саны үшін N саны табылып, барлық $n > N$ үшін

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon,$$

ал $n_k \to +\infty$ ұмтылатын болғандықтан, барлық $k > \mathrm{N}$ үшін $n_k > \mathrm{N}$. Сондықтан, $k > \mathrm{N}$ болғанда

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e \right| < \varepsilon .$$

Демек, (4) орындалады.

Енді

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad (5)$$

екенін көрсетейік.

Онда тізбек тіліндегі Гейне анықтамасы бойынша, әрбір $+\infty$-ке ұмтылатын $\{x_k\}$ тізбегі үшін $\left\{\left(1+1/x_k\right)^{x_k}\right\}$ сәйкес тізбегінің e санына ұмтылатынын көрсетуіміз керек. Айталық, $\{x_k\}$ дәл сондай тізбек, ал әрбір мүшесі үшін одан аспайтын ең үлкен бүтін сан n_k, яғни $n_k < x_k < n_{k+1}$ болсын. Сонда

$$1+\frac{1}{n_{k+1}}\le 1+\frac{1}{x_k}\le 1+\frac{1}{n_k} \quad \text{және} \quad \left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_k}\le\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}\le\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_{k+1}}.$$

Бұлардың оң жақ және сол жағындағы шектер мәндері бірдей e санына ұмтылады. Шынында да,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_{k+1}}}{1+\frac{1}{n_{k+1}}}=e,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e.$$

Мұнан (II-т. § 4, 1-теорема, в)

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e,$$

яғни (5) теңдік дәлелденді.

Енді

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad (6)$$

теңдігін дәлелдейік.

Егер x_k шегі $-\infty$ болатын тізбек болатын болса, онда $y_k=-x_k$ тізбегінің шегі $+\infty$ болады. Сонда

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k}=\left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k}=\left(\frac{1+y_k-1}{y_k-1}\right)^{y_k-1+1}=\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right).$$

Мұнан шекке көшсек,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)=e\cdot 1=e,$$

яғни (5) және (6) теңдіктерден

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

шығады.

Функцияларды салыстыру

$f:E\to\mathrm{R}$ және $g:E\to\mathrm{R}$ функциялары беріліп, ал a осы функциялардың анықталу аймағы E жиынының шектік нүктесі болсын. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ болса, онда a нүктесінің маңайында $f(x)$ функциясын шексіз аз деп атайтынымызды біз жоғарыда айтқанбыз. Егер $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ болса, онда a нүктесінің маңайыда $f(x)$ функциясының аздық реті $g(x)$ функциясына қарағанда жоғарырақ деп айтады да $f(x)=o(g(x))$ арқылы жазады. Мұны "$g(x)$-тен o кіші" деп оқиды. Егер a нүктесінің маңайында $C>0$ саны табылып, $|f(x)|<C|g(x)|$ теңсіздігі орындалса, онда a нүктесінің маңайында $f(x)$ функциясын $g(x)$ функциясымен салыстырғанда шектеулі деп айтады да $f(x)=O(g(x)\_)$, $x\to a$, деп жазады. Мұны "$g(x)$-тен O үлкен" деп оқиды. Егер $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ болса, онда a нүктесінің маңайында $f(x)$ және $g(x)$ функцияларын эквивалентті деп айтып, $f(x)\sim g(x)$, $x\to a$, арқылы жазады. Мұндай o және O белгілеулерін Ландау белгілеулері немесе Ландау символдары деп айтады.

Мысалдар.

1. $x+x^2=\mathrm{O}(x^2), x\to\infty.$

2. $x+x^2=\mathrm{O}(x^2), x\to 0.$

3. $\sin x=\mathrm{O}(1), x\to\infty$

4. $\sin x=\mathrm{O}(x), x\to 0$

5. $x=\mathrm{O}(\sin x), x\to 0.$

6. Алдыңғы екі мысалдан $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, яғни $\sin x\sim x, x\to 0$.

7. $x=o(x^2), x\to\infty.$

8. $x^2=o(x\ \ ), x\to 0.$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=o(1), x\to\infty.$

10. $\sqrt{x}=o(1), x\to 0.$

Егер функциялардың қандай нүкте маңайында салыстырылып тұрғаны алдын-ала белгілі болып тұрса, онда жоғарыдағы Ландау белгілеулерінде $x\to a$ символын жазбай-ақ қояды.

$f=\mathrm{O}(\varphi)$ және $g=\mathrm{O}(\varphi)$, $x\to a$, теңдіктерінен әрқашан $f(x)=g(x)$ деп қорытынды жасауға болмайды. Мысалы, $x^2=\mathrm{O}(x), x\to 0$ және $x^3=\mathrm{O}(x), x\to 0$, бірақ $x^2 \neq x^3$. Дәл осылай $f + O(\varphi) = g + O(\varphi)$, $x \to a$, болғанымен $f \neq g$ болуы мүмкін. Мысалы, $x^2 = O(x), x \to 0$, және $x^2 + x^3 = O(x)$, $x \to 0$, бірақ $x^2 \neq x^2 + x^3$.

1-теорема. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функиялары a нүктесінің маңайында эквивалентті және $\lim\limits_{x \to a} f(x)h(x) = \alpha$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x \to a} g(x)h(x) = \alpha$ шегі де бар.

Дәлелдеу. f және g функциялары эквивалентті болғандықтан

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

және

$$\lim_{x\to a} g(x)h(x)=\lim_{x\to a} f(x)h(x)\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a} f(x)h(x)\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha .$$

Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан шек астында кез-келген көбейткішті (немесе бөлгішті) оған эквивалентті көбейткішпен (немесе бөлгішпен) ауыстыруға болатынын көреміз. Бірақ, жоғарыда атап өткеніміздей, қосылғыштарды оларға эквивалентті функциялармен ауыстыруға болмайды. Мысалы,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

Егер мұнда қосылғыш $\cos x$ функциясын оған эквивалентті 1 фукциясымен ауыстырсақ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x^2}=0.$$

2-теорема. Егер $f=O(\varphi), g=O(\psi), x\to a,$ болса, онда

$$f\cdot g=O(\varphi)O(\psi)=O(\varphi\cdot\psi), x\to a$$

Дәлелдеу. $f=O(\varphi),\ g=O(\psi)$ болғандықтан, $|f(x)|\le C_1|\varphi(x)|\ \forall x\in \overset{0}{U}{}_E^{\delta_1}(a)$ және $|g(x)|\le C_2|\psi(x)|\ \forall x\in \overset{0}{U}{}_E^{\delta_2}(a)$ болатын $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2$ табылады. Онда

$$\forall x\in \overset{0}{U}{}_E^{\delta}(a)\subset \overset{0}{U}{}_E^{\delta_1}(a)\cap \overset{0}{U}{}_E^{\delta_2}(a)\left(|f\cdot g|\le C_1C_2|\varphi(x)\psi(x)|\right)$$

яғни $fg=O(\varphi\cdot\psi), x\to a.$ Теорема дәлелденді.

Дәл осылай

$$O(\varphi)+O(\varphi)=O(\varphi),$$

$$o(\varphi)+o(\varphi)=o(\varphi),\quad O(\varphi)\cdot o(\varphi)=o(\varphi),\quad o(\varphi)\cdot o(\varphi)=o(\varphi),\quad O(\varphi)+o(\varphi)=O(\varphi)$$

$$o(O(\varphi))=O(\varphi), O(O(\varphi))=O(\varphi), o(o(\varphi))=o(\varphi), O(o(\varphi))=o(\varphi)$$

теңсіздіктерін де оңай дәлелдеуге болады. Жоғарыдағы мысалдардан

1. $x\sim x+x^2, x\to 0.$ **2.** $\sin x\sim x, x\to 0.$ **3.** $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\sim e, x\to\infty.$ **4.** $\ln(1+x)\sim x, x\to 0.$

$$\frac{x-\sin x}{\quad}\qquad x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\right)\qquad \left(\frac{1}{\quad}\qquad\right)\qquad 1$$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Big(\qquad\Big)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{}{3!} + O(x^2)\right) = \dfrac{}{3!}$

Практикада жиі қолданылатын, кейінірек дәлелденетін

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + O\left(x^{n+1}\right), x \to 0; \quad \cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + O\left(x^{2n+2}\right), x \to 0;$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + O\left(x^{2n+5}\right), x \to 0;$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + O\left(x^{n+1}\right), x \to 0;$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1}), x \to 0$$

формулалары элементар функциялар шектерін есептеуде аса күшті құрал болып табылады.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}} - \cos\frac{1}{x}\right)$ шегін есептейік. Мұндағы

$$\frac{x^3+x}{1+x^3} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}} = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-1} =$$

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^3}+O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) = 1+\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right), x \to \infty.$$

Ал

$$\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}} = \left(1+\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{7}} = 1+\frac{1}{7}\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right), x \to \infty.$$

$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right), x \to \infty.$$

Бұл екеуінің айырымы

$$\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}} - \cos\frac{1}{x} = \frac{9}{14}\frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), x \to \infty.$$

Сонымен,

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{9}{14}\frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{9}{14}.$$